Задача. Представим себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. За какое время тело, брошенное в эту шахту, достигнет центра Земли? Сопротивление движению отсутствует.

Решение.

1. Прежде всего, надо найти силу, которая действует на тело во время полета. Это гравитационная сила — Земля действует на тело силой тяготения. В случае притяжения для двух материальных точек эта сила вычисляется так:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1)$$

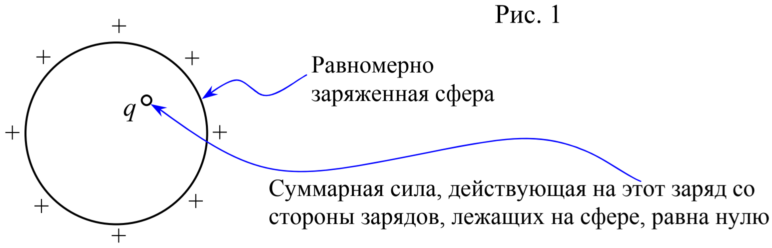
(m_1 и m_2 — массы притягивающихся точек, r — расстояние между ними, G — гравитационная постоянная $\approx 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг²). Однако в нашем случае Земля, внутри которой летит тело, никак материальной точкой считаться не может. В такой ситуации надо мысленно разбивать Землю на материальные точки, находить силы, действующие на тело со стороны каждой такой точки, и складывать. Подобные задачи решаются с помощью интегралов, но в нашем случае без этого можно обойтись.

Можно заметить, что формула гравитационного взаимодействия двух точечных масс (1) имеет точно такой же вид, как формула электростатического взаимодействия двух точечных зарядов (закон Кулона):

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Роль масс m_1 и m_2 здесь играют модули зарядов q_1 и q_2, а вместо гравитационной постоянной G константа $k \approx 9\cdot10^9$ Н·м²/Кл². Получается, что все выводы, полученные относительно взаимодействия зарядов в электростатике можно применять к гравитационному взаимодействию масс! (Только надо учитывать особенности в направлении сил: гравитация — это всегда притяжение, m_1 и m_2 — положительные числа, тогда как электростатическое взаимодействие может быть и притяжением и отталкиванием)

Рис. 1



В электростатике доказывается, что внутри равномерно заряженной сферы напряженность электрического поля, создаваемого зарядами, лежащими на этой сфере, равна нулю. Т. е. суммарная электрическая сила, действующая на точечный заряд, помещенный внутрь сферы, со стороны зарядов, лежащих на сфере, равна нулю. (Если сфера заряжена равномерно.) Доказательство можно провести с помощью теоремы Гаусса или просто путем суммирования сил, действующих со стороны бесконечно малых площадок.

Так вот, этот факт справедлив и для сил тяготения: <u>гравитационная сила со стороны массивной сферы на тело, находящееся внутри этой сферы, не действует.</u>

Зная это, можно легко вычислить силу, действующую на тело массой m, находящееся в шахте на расстоянии x от центра Земли (см. рисунок 2).

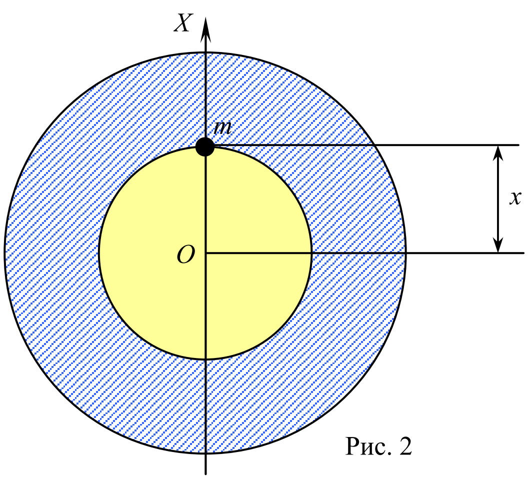


Рис. 2

Представим себе сферическую поверхность радиуса x с центром в центре Земли (наше тело m лежит на этой поверхности). Такая сферическая поверхность разбивает Землю на шар радиуса x, находящийся внутри данной поверхности (желтый шар на рисунке), и внешнюю сферу (синяя штриховка на рисунке). Внешняя (заштрихованная синим) часть Земли состоит из сфер, для которых тело m находится внутри и гравитационная сила со стороны этих сфер на тело m не действует. Получается, что сила тяготения действует на тело m только со стороны внутреннего шара радиусом x (закрашенного желтым на рисунке). Найдем эту силу по формуле (1) – формула справедлива не только для двух материальных точек, но и для двух шаров (m_1 и m_2 — массы шаров, r — расстояние между их <u>центрами</u>)

$$F = G\frac{m\rho\frac{4}{3}\pi x^3}{x^2} = \frac{4}{3}Gm\rho\pi x \qquad (2)$$

В этой формуле выражение $\rho\frac{4}{3}\pi x^3$ — масса шара радиусом x, к которому притягивается тело m (ρ - плотность вещества планеты, $(4/3)\pi x^3$ — объем шара).

Из формулы (2) видно, что на тело, падающее в шахту, действует гравитационная сила, направленная к центру планеты, и пропорциональная расстоянию x до этого центра. То есть, чем дальше тело падает, тем меньше сила тяготения. Когда тело будет пролетать через центр планеты ($x = 0$) сила тяготения на мгновение обратится в ноль, а затем станет возрастать по мере удаления от центра (пропорционально расстоянию x до этого центра).

2. Теперь, когда мы знаем величину силы, действующей на падающее в шахте тело, подумаем, как можно найти время движения до центра. Формулы, позволяющие найти время движения, относятся к разделу «кинематика». В этом разделе физики выводятся формулы, связывающие путь, скорость, ускорение и время для разных типов движения (у каждого типа движения свои формулы, поэтому сначала нужно понять какой тип движения происходит в нашей задаче). Школьникам положено знать три типа движения:

равномерное движение (по прямой или по окружности);
движение с постоянным ускорением;
гармоническое движение (когда координата тела меняется по закону синуса или косинуса).

Движение тела, брошенного в шахту, явно не равномерное (модуль скорости меняется). Ускорение в этом движении тоже не будет постоянным (по второму закону ньютона $a = F/m$, а равнодействующая сила F в нашем случае меняется по формуле (2), убывая по мере приближения к центру планеты).

А вот гармоническое движение подходит. Действительно, в гармоническом движении координата тела меняется по закону $x = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$. Возьмем вторую производную по времени от этого равенства (вторая производная координаты рана проекции ускорения $x''(t) = a_x$)

$$x'(t) = -\omega A\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$x''(t) = -\omega^2\underbrace{A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)}_{x} = -\omega^2 x$$

Видим, что в гармоническом движении проекция ускорения пропорциональна координате: $a_x = -\omega^2 x$

Та же ситуация в нашей задаче. Записав второй закон Ньютона для тела, падающего в шахту, получим:

$$a_x = F_x/m = -(4/3)G\rho\pi x$$

Вывод: падающее в шахту тело совершает гармоническое движение с циклической частотой $\omega = \sqrt{(4/3)G\rho\pi}$.

К такому выводу можно прийти и иначе. На тело, падающее в шахту, действует сила, пропорциональная расстоянию x до центра

$$F = kx$$

(это формула (2), где буквой k обозначено $k = (4/3)Gm\rho\pi$)

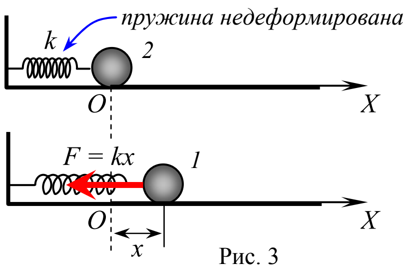


Рис. 3

Такая же сила действует на груз, прикрепленный горизонтальной пружиной жесткости k к неподвижной стенке: $F = kx$

Получается, что движение камня, брошенного в шахту, от поверхности ($x = R$) до центра Земли ($x = 0$) аналогично движению груза на пружине (рис. 3) из отклоненного положения («1» на рисунке 3) в положение равновесия («2» на рисунке 3). И в том и в другом случае движение происходит под действием силы $F = kx$, сонаправленной с вектором скорости. Это движение колебательное, происходит по гармоническому (т. е. синусоидальному) закону. (Тело в шахте тоже будет совершать колебания: пролетит Землю насквозь, потом полетит обратно и т. д.)

Время движения груза на пружине от положения «1» до положения «2» равно четверти периода колебаний: $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$. Точно так же и время движения тела до центра Земли равно четверти периода колебаний:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{4G\rho\pi}} \qquad (3)$$

Здесь вместо k подставлено $k = (4/3)Gm\rho\pi$.

3. Если мы хотим получить в задаче числовой ответ, то надо знать среднюю плотность Земли ρ. В таблице из учебника астрономии можно найти эту величину: $\rho = 5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3.

Можно вычислить плотность Земли, исходя из ее радиуса $R = 6370$ км (он есть в учебниках и задачниках по физике) и ускорения свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = G\rho\frac{4}{3}\pi R \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3g}{4G\pi R} \approx 5{,}5\cdot10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Подставим эту плотность в формулу (3) и получим окончательный числовой ответ: $t \approx 1267$ с